

অনুশীলনী-১০

প্রয়োজনীয় আলোচনাঃ

একটি সরলরেখা x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তার ট্যানজেন্ট মানকে ঢাল বলে। ঢাল

$$m = \tan \theta$$

১. যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুর স্পর্শকটি x - অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \tan 180^\circ = 0$ হবে।

২. যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুর স্পর্শকটি x - সাথে লম্ব হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \tan 90^\circ = \infty$ হবে।

৩. যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুর স্পর্শকটি x - সাথে 45° কোন উৎপন্ন করে, তবে $\frac{dy}{dx} = \tan 45^\circ = 1$ হবে।

৪. যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুর স্পর্শকটি x -সাথে যে কোন উৎপন্ন করে, তবে \tan এর কোন তত হবে।

৫. যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুর স্পর্শকটি x - সাথে সূক্ষকোন উৎপন্ন করে, তবে $\frac{dy}{dx} > 0$ হবে।

৬. যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার $p(x, y)$ বিন্দুর স্পর্শকটি x - সাথে ঝুলকোন উৎপন্ন করে, তবে $\frac{dy}{dx} < 0$ হবে।

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১. $\frac{dy}{dx} = 1$ স্পর্শকটি X-অক্ষের সাথে কত ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করবে।

সমাধানঃ $\frac{dy}{dx} = 1$

বা, $\tan \theta = \tan 45^\circ \quad \therefore \theta = 45^\circ$ (Ans)

২. স্পর্শকটি X- অক্ষের সমান্তরাল হলে $\frac{dy}{dx}$ কত?

সমাধানঃ স্পর্শকটি X- অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \tan 180^\circ = 0$ হবে।

৩. স্পর্শকটি X- সাথে লম্ব হলে $\frac{dy}{dx}$ কত?

সমাধানঃ স্পর্শকটি X- সাথে লম্ব হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = \tan 90^\circ = \infty$ হবে।

৪. $y = \frac{1}{x^2}$ বক্ররেখার $x = -1$ বিন্দুতে ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $y = \frac{1}{x^2}$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3} \quad \therefore x = -1 \text{ বিন্দুতে ঢাল } \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(-1)^3} = 2 \text{ (Ans)}$$

৫. $y = \frac{1}{x}$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $y = \frac{1}{x}$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} \quad \therefore x = 2 \text{ বিন্দুতে ঢাল } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4} \text{ (Ans)}$$

৬. $y^2 = x^2$ বক্ররেখার $(1,1)$ বিন্দুতে ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $y^2 = x^2$

$$\text{বা, } 2y \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \therefore (1,1) \text{ বিন্দুতে ঢাল } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1 \text{ (Ans)}$$

৭. x কোন মানের জন্য $y = x(x^2 - 12)$ বক্ররেখার ঢাল শূন্য হবে।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = x(x^2 - 12) = x^3 - 12x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$$

যেহেতু, বক্ররেখার ঢাল শূন্য সুতরাং $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\text{বা, } 3x^2 - 12 = 0$$

$$\text{বা, } 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2 \text{ (Ans)}$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক X -অক্ষের সমান্তরাল ঐ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে $y = x^3 - 3x + 2 \dots\dots\dots$ (i)

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

যেহেতু, স্পর্শকটি X -অক্ষের সমান্তরাল সেহেতু $\frac{dy}{dx} = \tan 180^\circ = 0$

$$\text{বা, } 3x^2 - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 3(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1$$

(i)নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$\text{যখন, } x = 1 \text{ তখন } y = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$\text{যখন, } x = -1 \text{ তখন } y = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

\therefore নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(1,0)$ এবং $(-1,4)$

২. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক X -অক্ষের সমান্তরাল ঐ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15 \dots\dots (i)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

যেহেতু স্পর্শকটি X -অক্ষের সমান্তরাল সেহেতু $\frac{dy}{dx} = \tan 180^\circ = 0$

$$\text{বা, } 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\text{বা, } 3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 3x + x - 3 = 0$$

$$\text{বা, } (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 3, -1$$

(i)নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$$\text{যখন, } x = 3 \text{ তখন } y = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 15 = -12$$

$$\text{যখন, } x = -1 \text{ তখন } y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15 = 20$$

\therefore নির্ণেয় বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(3, -12)$ এবং $(-1, 20)$

৩. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক X -অক্ষের সমান্তরাল ঐ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \dots\dots (i)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2y \frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2(1-x)}{2y} = \frac{1-x}{y}$$

যেহেতু, স্পর্শকটি X -অক্ষের সমান্তরাল সেহেতু $\frac{dy}{dx} = \tan 180^\circ = 0$

$$\text{বা, } \frac{1-x}{y} = 0$$

$$\text{বা, } 1 - x = 0 \quad \therefore x = 1$$

(i)নং সমীকরণে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1^2 + y^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$$

\therefore নির্ণেয় বিন্দুগুলোর $(1, \pm 2)$ স্থানাঙ্ক (Ans)

8. $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শকটি X-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোর ঢাল বের কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3) \dots\dots (i)$

$$y = (x^2 - 1)(x - 3) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1$$

যেহেতু, স্পর্শকটি X-অক্ষকে ছেদ করে সেহেতু, ছেদ বিন্দুতে y-এর স্থানাঙ্ক শূন্য

সুতরাং (i) সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে পাই, $(x + 1)(x - 1)(x - 3) = 0$

$$\therefore x = 1, -1, 3$$

বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(1, 0)$, $(-1, 0)$ এবং $(3, 0)$

$$(1, 0) \text{ বিন্দুতে ঢাল, } \frac{dy}{dx} = 3.1^2 - 6.1 - 1 = -4$$

$$(-1, 0) \text{ বিন্দুতে ঢাল, } \frac{dy}{dx} = 3(-1)^2 - 6(-1) - 1 = 8$$

$$(3, 0) \text{ বিন্দুতে ঢাল, } \frac{dy}{dx} = 3.3^2 - 6.3 - 1 = 8$$

\therefore বিন্দুগুলোর ঢাল যথাক্রমে: $-4, 8, 8$ (Ans)