

## অনুশীলনী-১১

### পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ ও লিবনীজের উপপাদ্য

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলীঃ

যদি  $y = x$ -এর ফাংশন হয়, তবে-

$$\text{বা, } y_1 = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা, } y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{বা, } y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\text{বা, } y_4 = \frac{dy_3}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

.....

$$\text{বা, } y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

## অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১.  $y = e^{ax}$  হলে,  $y_n$  এর মান কত?

সমাধানঃ  $y = e^{ax}$

$$\text{বা, } y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\text{বা, } y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(ae^{ax}) = a \cdot ae^{ax} = a^2 e^{ax}$$

$$\text{বা, } y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}(a^2 e^{ax}) = a^2 \cdot ae^{ax} = a^3 e^{ax}$$

.....

.....

$$\text{বা, } y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx} = a^n e^{ax} \quad (\text{Ans})$$

২.  $y = e^x$  হলে  $y_n$  এর মান কত?

সমাধানঃ  $y = e^x$

$$\text{বা, } y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\text{বা, } y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\text{বা, } y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

.....

.....

$$\text{বা, } y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx} = e^x \quad (\mathbf{Ans})$$

৩.  $y = e^{-ax}$  হলে,  $y_n$  এর মান কত?

সমাধানঃ  $y = e^{-ax}$

$$\text{বা, } y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{-ax}) = -ae^{-ax}$$

$$\text{বা, } y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(-a \cdot e^{-ax}) = (-a) \cdot (-a)e^{-ax} = (-a)^2 e^{-ax}$$

$$\text{বা, } y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}\{(-a)^2 e^{-ax}\} = (-a)^2 \cdot (-a)e^{-ax} = (-a)^3 e^{-ax}$$

.....

.....

$$\text{বা, } y_n = \frac{dy_{n-1}}{dx} = (-a)^n e^{-ax} \quad (\text{Ans})$$

8.  $y = x^n$  হলে  $y_n$  এর মান কত?

সমাধানঃ  $y = x^n$

$$\text{বা, } y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\text{বা, } y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}(nx^{n-1}) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\text{বা, } y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d}{dx}\{n(n-1)x^{n-2}\} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

.....

.....

$$\text{বা, } y_n = n(n-1)(n-2) \dots (n-n+1)x^{n-n}$$

$$\text{বা, } y_n = n(n-1)(n-2) \dots (1) = n! \quad (\text{Ans})$$

## সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নঃ

১. যদি  $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $y_2 - m^2y = 0$

সমাধানঃ  $y = Ae^{mx} + Be^{-mx} \dots\dots(1)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } y_1 = \frac{d}{dx} \{Ae^{mx} + Be^{-mx}\} = Ame^{mx} + B(-m)e^{-mx}$$

$$\text{বা, } y_1 = m\{Ae^{mx} - Be^{-mx}\}$$

$$\text{বা, } y_2 = m\{Ame^{mx} - B(-m)e^{-mx}\}$$

$$\text{বা, } y_2 = m \cdot m\{Ae^{mx} + Be^{-mx}\}$$

$$\text{বা, } y_2 = m^2y \text{ [(i)নং দ্বারা]}$$

$$\therefore y_2 - m^2y = 0 \text{ (Proved)}$$

২. যদি  $y = \sin^{-1} x$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0$

সমাধানঃ  $y = \sin^{-1} x$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } y_1 = \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-x^2} \cdot y_1 = 1$$

$$\text{বা, } (1-x^2) y_1^2 = 1 \text{ (উভয় পক্ষে বর্গ করে)}$$

পুনরায়  $x$ -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } (1 - x^2) \cdot \frac{d}{dx} (y_1^2) + y_1^2 \cdot \frac{d}{dx} (1 - x^2) = \frac{d}{dx} 1$$

$$\text{বা, } (1 - x^2)(2 y_1 y_2) + y_1^2 (0 - 2x) = 0$$

$$\text{বা, } (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0 \quad (2y_1 \text{ দ্বারা ভাগ করে পাই})$$

$$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 = 0 \quad \text{(Proved)}$$

৩. যদি  $y = e^{a \sin^{-1} x}$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y$

সমাধানঃ  $y = e^{a \sin^{-1} x} \dots \dots \dots (i)$

$x$ -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } y_1 = \frac{d}{dx} (e^{a \sin^{-1} x}) = e^{a \sin^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} (a \sin^{-1} x)$$

$$\text{বা, } y_1 = ya \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad [(i) \text{নং দ্বারা}]$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-x^2} \cdot y_1 = ay$$

$$\text{বা, } (1 - x^2) y_1^2 = a^2 y^2 \quad (\text{উভয় পক্ষে বর্গ করে})$$

পুনরায়  $x$ -এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } (1 - x^2) \cdot \frac{d}{dx} (y_1^2) + y_1^2 \cdot \frac{d}{dx} (1 - x^2) = \frac{d}{dx} (a^2 y^2)$$

$$\text{বা, } (1 - x^2)(2 y_1 y_2) + y_1^2 (0 - 2x) = a^2 \cdot 2yy_1$$

$$\text{বা, } (1 - x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y \quad (2y_1 \text{ দ্বারা ভাগ করে পাই})$$

$$\therefore (1 - x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y \quad \text{(Proved)}$$

8. যদি  $y = e^{\tan^{-1} x}$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$

সমাধানঃ  $y = e^{\tan^{-1} x} \dots \dots \dots (i)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } y_1 = \frac{d}{dx} (e^{\tan^{-1} x}) = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$\text{বা, } y_1 = y \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad [(i)\text{নং দ্বারা}]$$

$$\text{বা, } (1 + x^2) \cdot y_1 = y$$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } (1 + x^2) \cdot \frac{d}{dx} (y_1) + y_1 \cdot \frac{d}{dx} (1 + x^2) = \frac{d}{dx} (y)$$

$$\text{বা, } (1 + x^2) \cdot y_2 + y_1 (0 + 2x) = y_1$$

$$\text{বা, } (1 + x^2)y_2 + 2xy_1 - y_1 = 0$$

$$\therefore (1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0 \quad (\text{Proved})$$

৫. যদি  $\sin \sqrt{y} = x$  বা,  $y = (\sin^{-1} x)^2$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

সমাধানঃ  $\sin \sqrt{y} = x$

$$\text{বা, } \sqrt{y} = \sin^{-1} x$$

$$\text{বা, } y = (\sin^{-1} x)^2 \dots\dots\dots(i)$$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } y_1 = \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)^2 = 2 \sin^{-1} x \cdot \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)$$

$$\text{বা, } y_1 = 2 \sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-x^2} \cdot y_1 = 2 \sin^{-1} x$$

$$\text{বা, } (1-x^2) y_1^2 = 4(\sin^{-1} x)^2 \text{ (উভয় পক্ষে বর্গ করে)}$$

$$\text{বা, } (1-x^2) y_1^2 = 4y \text{ [(i)নং দ্বারা]}$$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } (1-x^2) \cdot \frac{d}{dx} (y_1^2) + y_1^2 \cdot \frac{d}{dx} (1-x^2) = 4 \frac{d}{dx} y$$

$$\text{বা, } (1-x^2)(2 y_1 y_2) + y_1^2 (0-2x) = 4y_1$$

$$\text{বা, } (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2 \text{ (} 2y_1 \text{ দ্বারা ভাগ করে পাই)}$$

$$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2 \text{ (Proved)}$$



৬. যদি  $\cos \sqrt{y} = x$  বা,  $y = (\cos^{-1} x)^2$  হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

সমাধানঃ  $\cos \sqrt{y} = x$

$$\text{বা, } \sqrt{y} = \cos^{-1} x$$

$$\text{বা, } y = (\cos^{-1} x)^2 \dots \dots \dots (i)$$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } y_1 = \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x)^2 = 2 \cos^{-1} x \cdot \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x)$$

$$\text{বা, } y_1 = 2 \cos^{-1} x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{1-x^2} \cdot y_1 = -2 \cos^{-1} x$$

$$\text{বা, } (1-x^2) y_1^2 = 4(\cos^{-1} x)^2 \quad (\text{উভয় পক্ষে বর্গ করে})$$

$$\text{বা, } (1-x^2) y_1^2 = 4y \quad [(i)\text{নং দ্বারা}]$$

পুনরায় x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } (1-x^2) \cdot \frac{d}{dx} (y_1^2) + y_1^2 \cdot \frac{d}{dx} (1-x^2) = 4 \frac{d}{dx} y$$

$$\text{বা, } (1-x^2)(2y_1 y_2) + y_1^2(0-2x) = 4y_1$$

$$\text{বা, } (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2 \quad (2y_1 \text{ দ্বারা ভাগ করে পাই})$$

$$\therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2 \quad (\text{Proved})$$