অনুশীলনী-১২

আংশিক অন্তরীকরন(**Partial Differentiation**)

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১.যদি $\mathbf{u = e^{ax}}$ হয়, তবে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $u = e^{ax}$

বা, $\frac{\partial u}{\partial x} = a.e^{ax}$

বা, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a.a.e^{ax} = a^2.e^{ax}$ **(Ans)**

২.যদি $\mathbf{u = \log(x^2 + y^2)}$ হয়, তবে $\frac{\partial u}{\partial x}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $u = \log(x^2 + y^2)$

বা, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2}.\frac{\partial u}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2+y^2}(2x + 0) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ **(Ans)**

৩.যদি $\mathbf{u = x^2 + 2xy + y^2}$ হয়, তবে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $u = x^2 + 2xy + y^2$

বা, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 0 = 2x + 2y$

বা, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 0 = 2$ **(Ans)**

৪.যদি $\mathbf{u = x^2 + 2xy + y^2}$ হয়, তবে $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $u = x^2 + 2xy + y^2$

বা, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 + 2x + 2y = 2x + 2y$

বা, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 2 = 2$ **(Ans)**

৫.যদি $\mathbf{u = x^3 + x^2y^2 + y^3}$ হয়, তবে $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $u = x^3 + x^2y^2 + y^3$

বা, $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 + 0$

বা, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3.2x + 2y^2 = 6x + 2y^2$ **(Ans)**

৬.যদি $\mathbf{u = \tan^{-1} \frac{y}{x}}$ হয়, তবে $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

বা, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ **(Ans)**

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নঃ

১.$\mathbf{f = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$ হলে, $\mathbf{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}$ =কত?

সমাধানঃ

দেওয়া আছে $f = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

বা, $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+y)^2 . \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 3(x+y)^2(1+0) = 3(x+y)^2$

বা,$x\frac{\partial f}{\partial x} = 3x(x+y)^2$ . . . .(i)

অনুরূপ, $y\frac{\partial f}{\partial y} = 3y(x+y)^2$. . . .(ii)

এখন, $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3x(x+y)^2 + 3y(x+y)^2$

$= 3(x+y)^2(x+y) = 3(x+y)^3 = 3f$ **(Ans)**

২.$\mathbf{v = \log(xyz)}$ হলে, $\mathbf{xv_x + yv_y + zv_z}$=কত?

সমাধানঃ

দেওয়া আছে $v = \log(xyz)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

বা, $v_x = \frac{1}{xyz} . \frac{\partial}{\partial x}(xyz) = \frac{1}{xyz} . yz = \frac{1}{x}$

বা, $xv_x = \frac{x}{x} = 1 \quad . . . .(i)$

অনুরূপ, $yv_y = 1 \ . . . .(ii)$

আবার, $zv_z = 1 \ . . . .(iii)$

এখন, $xv_x + yv_y + zv_z = 1 + 1 + 1 = 3$ **(Ans)**

৩.$\mathbf{v = \log(x^2 + y^2)}$ হলে, $\mathbf{yv_y = y\frac{\partial v}{\partial y}}$ =কত?

সমাধানঃ

দেওয়া আছে $v = \log(x^2 + y^2)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

বা, $v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2} . \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2+y^2} . (0 + 2y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$\therefore \ yv_y = y\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y^2}{x^2+y^2}$ **(Ans)**

৪.যদি $\mathbf{u = x^2y + y^2z + z^2x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\mathbf{u_x + u_y + u_z = (x+y+z)^2}$

সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $u = x^2y + y^2z + z^2x$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = u_x = 2xy + 0 + z^2 = 2xy + z^2$$

অনুরূপ, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = x^2 + 2yz$ এবং $\frac{\partial u}{\partial z} = u_z = y^2 + 2zx$

L.H.S $= u_x + u_y + u_z = 2xy + z^2x + x^2 + 2yz + y^2 + 2zx$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$= (x+y+z)^2$ **R.H.S(Proved)**

৫.যদি $\mathbf{v = x^2 + y^2 + z^2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\mathbf{xv_x + yv_y + zv_z = 2v}$

সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $v = x^2 + y^2 + z^2$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

বা, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 0 + 0$

$\therefore xv_x = 2x^2 .....(i)$ অনুরূপ, $yv_y = 2y^2 ....(ii)$ এবং $zv_z = z^2 ....(iii)$

এখন, (i),(ii)ও (iii) নং যোগ করে পাই, $xv_x + yv_y + zv_z = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2v$ (প্রমানিত)

৬.যদি $\mathbf{u = log}(x^2 + y^2 - \mathbf{2xy})$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} = u_x + u_y = \mathbf{0}$

সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $u = \log(x^2 + y^2 - 2xy) = \log(x-y)^2 = 2\log(x-y)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরন করে পাই

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = u_x = 2.\frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial x}(x-y) = \frac{2}{x-y}.(1-0) = \frac{2}{x-y} \quad .....(i)$$

অনুরূপ, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = \frac{-2}{x-y}......(ii)$

(i) ও (ii) নং সমীকরন যোগ করে পাই, $u_x + u_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (প্রমানিত)

৭.যদি $\mathbf{u = sin^{-1}\frac{x}{y} + tan^{-1}\frac{y}{x}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\mathbf{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0}$

সমাধানঃ

দেওয়া আছে, $u = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$

বা, $u = \mathrm{cosec}^{-1}\frac{y}{x} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$

বা,$u = f\left(\frac{y}{x}\right)$

বা, $u = x^0 f\left(\frac{y}{x}\right)$

সুতরাং অয়লারের উপপাদ ¨ অনুসারে আমরা লিখতে পারি,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.u = 0$$ (প্রমানিত)