



Good Morning Everybody

Gourjibon Roy

Jr.Instructor(Non-Tech/Math)

Patuakhali Polytechnic Institute



Mathematics -2

Subject code-65921

অনুশীলনী-১

নির্ণায়ক (Determinant)

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১.নির্ণায়ক কাকে বলে?

উত্তরঃ কতগুলো রাশি বা পদকে দুটি খাড়া রেখার মধ্যে নির্দিষ্ট নিয়মে সমান সংখ্যক সারি ও কলামে বর্গাকার পক্ষে সাজানো উপায়কে নির্ণায়ক বলে।

২.অনুরাশি কাকে বলে?

উত্তরঃ নির্ণায়কের কোন একটি উপাদানের কলাম ও সারির উপাদানগুলো বাদে বাকী উপাদানগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়ককে ঐ উপাদানের অনুরাশি বলে।

৩. সহগুনক কাকে বলে।

উত্তরঃ একটি নির্ণায়ককে বিস্তৃত করলে কোন উপাদানের সহগকে এর সহগুনক বলে।

অথবা,কোন উপাদানের অনুরাশির পূর্বে যথাযোগ্য চিহ্ন বসালে যে নির্ণায়ক গঠিত হয় তাকে উক্ত উপাদানের সহগুনক বলে।

৪.একটি নির্ণায়কের পাশাপাশি দুইটি সারি বা কলাম পরিবর্তিত হলে নতুন নির্ণায়কের মান কত হবে?

উত্তরঃ নির্ণায়কটি অপরিবর্তিত থাকবে কিন্তু চিহ্নের পরিবর্তন হবে।

৫. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(54 - 56) - 2(27 - 28) + 5(24 - 24)$
 $= 1(-2) - 2(-1) + 5.0 = -2 + 2 = 0$ Ans

৬. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2.0 = 0$ Ans

৭. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} = (b+c) - (a+b)$
 $= b+c-a-b = c-a$ **Ans**

৮. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় কর। [যেখানে ω একটি ক্যাম্পলনিক ঘনমূল]

সমাধানঃ $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1 \\ 1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 + c_2 + c_3], 1+\omega+\omega^2 = 0$
 $= \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$ **Ans**

৯. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$ এই নির্ণায়টির -2 উপাদানের অনুরাশি ও সহগুনক লিখ।

সমাধানঃ -2 উপাদানের অনুরাশি = $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$ Ans

-2 উপাদানের সহগুনক = $-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-6 + 3) = 3$ Ans

১০. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এই নির্ণায়টির b_1 ও a_2 উপাদানের অনুরাশি ও সহগুনক লিখ।

সমাধানঃ b_1 উপাদানের অনুরাশি = $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2c_3 - a_3c_2$ Ans

b_1 উপাদানের সহগুনক = $-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - a_3c_2) = a_3c_2 - a_2c_3$ Ans

a_2 উপাদানের অনুরাশি = $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1c_3 - b_3c_1$ Ans

a_2 উপাদানের সহগুনক = $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - b_3c_1) = b_3c_1 - b_1c_3$ Ans

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নঃ

$$\text{১.প্রমাণ কর যেঃ } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a^3 - 1)^2$$

$$\text{সমাধানঃ বামপক্ষ} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + a + a^2 & a & a^2 \\ 1 + a + a^2 & 1 & a \\ 1 + a + a^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix} \quad [c'_1 = c_1 + c_2 + c_3]$$

$$= (1 + a + a^2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + a + 1) \begin{vmatrix} 0 & a - 1 & a^2 - a \\ 0 & 1 - a^2 & a - 1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix} \quad [r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= (a^2 + a + 1) \begin{vmatrix} a - 1 & a^2 - a \\ 1 - a^2 & a - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + a + 1) \begin{vmatrix} a - 1 & a(a - 1) \\ -(a - 1)(a + 1) & a - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + a + 1)(a - 1)(a - 1) \begin{vmatrix} 1 & a \\ -(a + 1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a - 1)^2 (a^2 + a + 1)(1 + a + a^2)$$

$$= \{(a - 1)(a^2 + a + 1)\}^2 = (a^3 - 1)^2 \text{ ডানপক্ষ (প্রমানিত)}$$

$$\text{২.প্রমাণ কর যে: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$$

$$\text{সমাধানঃ বামপক্ষ} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-p & 1-p^2 \\ 0 & p-p^2 & p^2-p^4 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} \quad [r'_1 = r_1 - r_2, r'_2 = r_2 - r_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 1-p & 1-p^2 \\ p-p^2 & p^2-p^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(p-1) & -(p^2-1) \\ -p(p-1) & -p^2(p^2-1) \end{vmatrix}$$

$$= \{-(p-1)\}\{-(p^2-1)\} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & p^2 \end{vmatrix}$$

$$= (p-1)(p^2-1)(p^2-p)$$

$$= (p-1)(p^2-1)p(p-1) = p(p-1)^2(p^2-1) \quad \text{ডানপক্ষ (প্রমানিত)}$$

$$\text{৩.প্রমাণ কর যেঃ } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\text{সমাধানঃ বামপক্ষ} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a - b & b - c & c \\ a^3 - b^3 & b^3 - c^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad [c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

$$= \begin{vmatrix} a - b & b - c \\ a^3 - b^3 & b^3 - c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - b & b - c \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) & (b - c)(b^2 + bc + c^2) \end{vmatrix}$$

$$= (a - b)(b - c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 + ab + b^2 & b^2 + bc + c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a - b)(b - c) \{ (b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ab + b^2) \}$$

$$= (a - b)(b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2 - ab - b^2)$$

$$= (a - b)(b - c)(bc - ab + c^2 - a^2)$$

$$= (a - b)(b - c) \{ b(c - a) + (c + a)(c - a) \}$$

$$= (a - b)(b - c)(c - a)(b + c + a)$$

$$= (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a) \quad \text{ডানপক্ষ (প্রমানিত)}$$

8. প্রমাণ কর যেঃ
$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = a(a-b)(b-c)(c-a)$$

সমাধানঃ বামপক্ষ =
$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

=
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b-a & c-b & a+b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} \quad [c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

=
$$a \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -(a-b) & -(b-c) \\ -(a-b)(a+b) & -(b-c)(b+c) \end{vmatrix}$$

=
$$a\{-(a-b)\}\{-(b-c)\} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (a+b) & (b+c) \end{vmatrix}$$

=
$$a(a-b)(b-c)\{(b+c) - (a+b)\}$$

=
$$a(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$$

=
$$a(a-b)(b-c)(c-a) = \text{ডানপক্ষ (প্রমানিত)}$$

৫. প্রমাণ কর যে:
$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & yz & -z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$$

সমাধানঃ বামপক্ষ =
$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & yz & -z^2 \end{vmatrix}$$

=
$$xyz \begin{vmatrix} x & x & x \\ y & -y & y \\ z & z & -z \end{vmatrix}$$
 (১ম, ২য় ও ৩য় কলাম হতে x, y ও z কমন নিয়ে পাই)

=
$$xyz \cdot xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
 (১ম, ২য় ও ৩য় সারি হতে x, y ও z কমন নিয়ে পাই)

=
$$x^2y^2z^2 \{1(1 - 1) - 1(-1 - 1) + 1(1 + 1)\}$$

=
$$x^2y^2z^2(0 + 2 + 2) = 4x^2y^2z^2$$
 ডানপক্ষ (প্রমানিত)

$$\text{৬.প্রমাণ কর যেঃ} \begin{vmatrix} a & b & ax + by \\ b & c & bx + cy \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{vmatrix} = -(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ac - b^2)$$

$$\text{সমাধানঃ বামপক্ষ} = \begin{vmatrix} a & b & ax + by \\ b & c & bx + cy \\ ax + by & bx + cy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{xy} \begin{vmatrix} ax & by & ax + by \\ bx & cy & bx + cy \\ ax^2 + bxy & bxy + cy^2 & 0 \end{vmatrix} \quad [c'_3 = xc_1, c'_2 = y \cdot c_2]$$

$$= \frac{1}{xy} \begin{vmatrix} ax & by & 0 \\ bx & cy & 0 \\ ax^2 + bxy & bxy + cy^2 & -(ax^2 + 2bxy + cy^2) \end{vmatrix} \quad c'_1 = c_3 - (c_1 + c_2)$$

$$= \frac{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)}{xy} \begin{vmatrix} ax & by \\ bx & cy \end{vmatrix} = \frac{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)}{xy} \cdot xy \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= -(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ac - b^2) = \text{ডানপক্ষ (প্রমানিত)}$$

৭. প্রমাণ কর যেঃ
$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^3$$

সমাধানঃ বামপক্ষ =
$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

=
$$\begin{vmatrix} a + b + c & a + b + c & a + b + c \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} [r'_1 = r_1 + r_2 + r_3]$$

=
$$(a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}$$

=
$$(a + b + c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b + c + a & -(b + c + a) & 2b \\ 0 & c + a + b & c - a - b \end{vmatrix} [c'_1 = c_1 - c_2, c'_2 = c_2 - c_3]$$

=
$$(a + b + c) \begin{vmatrix} a + b + c & -(a + b + c) \\ 0 & a + b + c \end{vmatrix}$$

=
$$(a + b + c) \{(a + b + c)^2 - 0\} = (a + b + c)^3 \text{ ডানপক্ষ (প্রমানিত)}$$

৮.ক্রমারের নিয়মে বা নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান নির্ণয় কর।

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - 2z = 10$$

$$3x - 3y - 5z = 2$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $2x - y + z = 0$

$$x + 2y - 2z = 10$$

$$3x - 3y - 5z = 2$$

এখানে, $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-10 - 6) + 1(-5 + 6) + 1(-3 - 6) = -32 + 1 - 9 = -40$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 + 1(-50 + 4) + 1(-30 - 4) = -46 - 34 = -80$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2(-50 + 4) - 0 + 1(2 - 30) = -92 - 28 = -120$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 + 30) + 1(2 - 30) + 0 = 68 - 28 = 40$$

$$\text{এখন, } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-80}{-40} = 2, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-120}{-40} = 3, z = \frac{D_z}{D} = \frac{40}{-40} = -1$$

∴ নির্ণেয় সমাধানঃ $x = 2, y = 3, z = -1$

৯.ক্রমারের নিয়মে বা নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান নির্ণয় কর।

$$x - 2y + z = 1$$

$$2x + y - z = 1$$

$$x + y + z = 4$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $x - 2y + z = 1$

$$2x + y - z = 1$$

$$x + y + z = 4$$

$$\text{এখানে, } D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 + 1) + 2(2 + 1) + 1(2 - 1) = 2 + 6 + 1 = 9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 + 1) + 2(1 + 4) + 1(1 - 4) = 2 + 10 - 3 = 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 + 4) - 1(2 + 1) + 1(8 - 1) = 5 - 3 + 7 = 9$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(4 - 1) + 2(8 - 1) + 1(2 - 1) = 3 + 14 + 1 = 18$$

এখন, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{9} = 1$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{9}{9} = 1$, $z = \frac{D_z}{D} = \frac{18}{9} = 2$

∴ নির্ণেয় সমাধানঃ $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$

১০.ক্রমারের নিয়মে বা নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান নির্ণয় কর।

$$3x + y + z = 10$$

$$x + y - z = 0$$

$$5x - 9y = 1$$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $3x + y + z = 10$

$$x + y - z = 0$$

$$5x - 9y = 1$$

$$\text{এখানে, } D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 3(0 - 9) - 1(0 + 5) + 1(-9 - 5) = -27 - 5 - 14 = -46$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 10(0 - 9) - 1(0 + 1) + 1(0 - 1) = -90 - 1 - 1 = -92$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(0 + 1) - 10(0 + 5) + 1(1 - 0) = 3 - 50 + 1 = -46$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 3(1 - 0) - 1(1 - 0) + 10(-9 - 5) = 3 - 1 - 140 = -138$$

$$\text{এখন, } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-92}{-46} = 2, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-46} = 1, z = \frac{D_z}{D} = \frac{-138}{-46} = 3$$

\therefore নির্ণেয় সমাধানঃ $x = 2, y = 1, z = 3$

নিজে চেষ্টা করঃ

নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান নির্ণয় কর। $x-2y+3z = 5$ $4x+3y+4z = 7$ $x+y-z = -4$ সমাধানঃ $(x, y, z) = (-$ $2,1,3)$	নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমাধান নির্ণয় কর। $x+y-z = 0$ $x-z-2= 0$ $2y-z-1 = 0$ সমাধানঃ $(x, y, z) = (-3,-2,-5)$
---	--

Thanks all