অনুশীলনী-৩

সূচক ধারা(Exponential Series)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলীঃ

১. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

২. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

৩.$(e^x + e^{-x}) = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right)$

৪. $(e^x - e^{-x}) = 2\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty\right)$

৫. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

৬. $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

১.প্রমান কর যে, e একটি সসীম সংখ্যা এবং e এর মান 2 অপেক্ষা বৃহৎত্তম এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমানঃ অমরা জানি, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

বা, $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

সুতরাং, $2 < e$

আবার, $3! = 3.2.1 > 2^2$

$\therefore \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$

আবার, $4! = 4.3.2.1 > 2^3$

$\therefore \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$ অনুরূপভাবে, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{6!} < \frac{1}{2^5}$, $\frac{1}{7!} < \frac{1}{2^6}$ . . . .

অতএব, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots\ldots \infty < \left\{1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots\ldots \infty)\right\}$

বা, $e < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$ [$\therefore s_\infty = \frac{a}{1-r}$ যেখানে, $a = 1, r = \frac{1}{2}$]

অর্থাৎ, $e < 3$

সুতরাং e একটি সসীম সংখ্যা এবং e এর মান 2 অপেক্ষা বৃহৎত্তম এবং 3 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$$\therefore 2 < e < 3$$

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নঃ

১.অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করঃ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}!}+\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{3}!}+\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

সমাধানঃ ধরি, ধারার যোগফল =S

1,5,9,13,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ = $1+(n-1)4=1+4n-4=4n-3$

1,2,3,4,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ = $1+(n-1)1=1+n-1=n$

প্রদত্ত ধারার n তম পদ $t_n=\frac{4n-3}{n!}=\frac{4n}{n!}-\frac{3}{n!}=\frac{4n}{n(n-1)!}-\frac{3}{n!}=\frac{4}{(n-1)!}-\frac{3}{n!}$

এখন, n=1,2,3,4,5. . . . . .ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$t_1=\frac{4}{(1-1)!}-\frac{3}{1!}=\frac{4}{1}-\frac{3}{1!}$

$t_2=\frac{4}{1!}-\frac{3}{2!}$

$t_3=\frac{4}{2!}-\frac{3}{3!}$

- - - - - - - - - - - - -

$$S = 4\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right)$$
$$- 3\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right)$$
$$= 4e - 3\left\{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right) - 1\right\}$$
$$= 4e - 3\{e - 1\} = 4e - 3e + 3$$
$$= e + 3 \quad \textbf{(Ans)}$$

২.অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করঃ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}!} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}!} + \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{4}!} + \ldots\ldots\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty$

সমাধানঃ ধরি, ধারার যোগফল =S

1,4,7,10,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ $= 1 + (n-1)3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$

1,2,3,4,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ $= 1 + (n-1)1 = 1 + n - 1 = n$

প্রদত্ত ধারার n তম পদ $t_n = \frac{3n-2}{n!} = \frac{3n}{n!} - \frac{2}{n!} = \frac{3n}{n(n-1)!} - \frac{2}{n!} = \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}$

এখন, n =1,2,3,4,5. . . . . .ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$t_1 = \frac{3}{(1-1)!} - \frac{2}{1!} = \frac{3}{1} - \frac{2}{1!}$$

$t_2 = \frac{3}{1!} - \frac{2}{2!}$

$t_3 = \frac{3}{2!} - \frac{2}{3!}$

\- - - - - - - - - - - - -

$S = 3\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right) - 2\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right)$

$= 3e - 2\left\{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right) - 1\right\}$

$= 3e - 2\{e - 1\} = 3e - 2e + 2 = e + 2$ **(Ans)**

৩.অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্নয় করঃ $\mathbf{1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} + \ldots\ldots\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty}$

অথবা, $\mathbf{\frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} + \ldots\ldots\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty}$

সমাধানঃ ধরি, ধারার যোগফল $= S$

$0,1,2,3,4,\ldots\ldots.$ ধারাটির n তম পদ $= 0 + (n-1)1 = 0 + n - 1 = n - 1$

$1,2,3,4,\ldots\ldots.$ ধারাটির n তম পদ $= 1 + (n-1)1 = 1 + n - 1 = n$

প্রদত্ত ধারার n তম পদ $t_n = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)}{(n-1)(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

এখন, n =1,2,3,4,5. . . . . .ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$t_1 = \frac{1}{(1-2)!} + \frac{1}{0!} = 0 + \frac{1}{1}$$

$$t_2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1!}$$

$$t_3 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$$

- - - - - - - - - - - - -

$$S = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \infty\right) + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \infty\right)$$

$= e + e = 2e$ **(Ans)**

৪. প্রমান কর যে ঃ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{1+2}}{\mathbf{2}!}+\frac{\mathbf{1+2+3}}{\mathbf{3}!}+\frac{\mathbf{1+2+3+4}}{\mathbf{4}!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty=\frac{\mathbf{3e}}{\mathbf{2}}$

সমাধানঃ ধরি, ধারার যোগফল = S

1,2,3,4,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ = $1+(n-1)1=1+n-1=n$

প্রদত্ত ধারার n তম পদ $t_n=\frac{1+2+3+4+\ldots\ldots+n}{n!}=\frac{1+2+3+\ldots+n}{n!}=\frac{n(n+1)}{2n!}=\frac{n(n+1)}{2n(n-1)!}=\frac{(n+1)}{2(n-1)!}$

$$=\frac{(n-1)+2}{2(n-1)!}=\frac{(n-1)}{2(n-1)!}+\frac{2}{2(n-1)!}=\frac{(n-1)}{2(n-1)(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{2(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

এখন, n =1,2,3,4,5. . . . . .ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$t_1=\frac{1}{2(1-2)!}+\frac{1}{0!}=0+\frac{1}{1}$$

$$t_2=\frac{1}{2.0!}+\frac{1}{1!}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1}+\frac{2}{1!}$$

$$t_3=\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$$

- - - - - - - - - - - -

$$S=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\infty\right)+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\infty\right)$$

$$=\frac{1}{2}e+e=\frac{3e}{2}\ \textbf{(Ans)}$$

৫. অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করঃ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{1+3}}{\mathbf{2}!}+\frac{\mathbf{1+3+5}}{\mathbf{3}!}+\frac{\mathbf{1+3+5+7}}{\mathbf{4}!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

অথবাঃ $\frac{\mathbf{1^2}}{\mathbf{1}!}+\frac{\mathbf{2^2}}{\mathbf{2}!}+\frac{\mathbf{3^2}}{\mathbf{3}!}+\frac{\mathbf{4^2}}{\mathbf{4}!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

সমাধানঃ

ধরি, ধারার যোগফল =S

1,2,3,4,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ $= 1+(n-1)1 = 1+n-1 = n$

1,3,5,7. . . . . . . ধারাটির n তম পদ $= n^2$

প্রদত্ত ধারার n তম পদ $t_n = \frac{1+3+5+7+\ldots+n}{n!} = \frac{n^2}{n!} = \frac{n.n}{n(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{(n-1)+1}{(n-1)!}$

$$= \frac{(n-1)}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)}{(n-1)(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}$$

এখন, n =1,2,3,4,5. . . . . .ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$t_1 = \frac{1}{(1-2)!}+\frac{1}{0!} = 0+\frac{1}{1}$$

$t_2 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1!}$

$t_3 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$

$t_4 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$

\- - - - - - - - - - - - -

$$S = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right) + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots.\infty\right)$$

$= e + e = 2e$ **(Ans)**

৬.অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করঃ $\frac{\mathbf{1^3}}{\mathbf{2!}} + \frac{\mathbf{2^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{\mathbf{3^3}}{\mathbf{4!}} + \frac{\mathbf{4^3}}{\mathbf{5!}} + \ldots\ldots\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty$

সমাধানঃ ধরি, ধারার যোগফল $= S$

1,2,3,4,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ $= 1 + (n-1)1 = 1 + n - 1 = n$

2,3,4,. . . . . . . ধারাটির n তম পদ $= 2 + (n-1)1 = 2 + n - 1 = n + 1$

প্রদত্ত ধারার n তম পদ $t_n = \frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{(n^3+1)-1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$$= \frac{(n^2-n+1)}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2-n}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

এখন, n =1,2,3,4,5. . . . . .ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$t_1 = \frac{1}{(1-2)!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} = 0 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$

$$t_2 = \frac{1}{(2-2)!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$t_3 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

$$t_4 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$$

\-   \- - - - - - - - - -   - -

\--

$$S = \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.\infty\right)+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.\infty\right)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.\infty\right)$$

$$= e+\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.\infty\right)-1\right\}-\left\{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.\infty\right)-2\right\}$$

$$= e+e-1-(e-2) = e+e-1-e+2 = e+1 \quad \textbf{(Ans)}$$

Thanks everybody