

অনুশীলনী-৪

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন (Inverse Circular Function)

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলীঃ

১. $\sin \theta = x$ হলে $\theta = \sin^{-1} x$

২. $\sin x = \theta$ হলে $x = \sin^{-1} \theta$

৩. $\sin \sin^{-1} x = x$

৪. $\cos \cos^{-1} x = x$ (অনুরূপ বাকীগুলো)

৫. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$

৬. $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$

৭. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

৮. $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

৯. $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1} \{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\}$

১০. $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1} \{x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\}$

পীথাগোরাসের সূত্রানুসারে আমরা জানি,

$$\text{অতিভুজ}^2 = \text{ভূমি}^2 + \text{লম্ব}^2$$

সাগরে লবন আছে,

$$\sin \theta = \text{লম্ব}/\text{অতিভুজ}$$

কবরে ভয় আছে,

$$\cos \theta = \text{ভূমি}/\text{অতিভুজ}$$

টেমসে লাস ভাসে,

$$\tan \theta = \text{লম্ব}/\text{ভূমি}$$

$$\cot \theta = \text{ভূমি}/\text{লম্ব}$$

$$\sec \theta = \text{অতিভুজ}/\text{ভূমি}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \text{অতিভুজ}/\text{লম্ব}$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

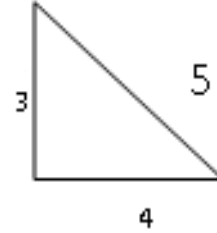
১. $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} =$ কত?

সমাধানঃ $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \tan^{-1} \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$
 $= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ (Ans)

২. $\sin \tan^{-1} \frac{3}{4}$ এর মান কত?

সমাধানঃ

$\sin \tan^{-1} \frac{3}{4} = \sin \sin^{-1} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$ (Ans)



৩. $\sin^{-1} x = \theta$ হলে $\tan \theta$ এর মান কত?

সমাধানঃ $\sin^{-1} x = \theta \quad \therefore \sin \theta = x$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ (Ans)

৪. $\cos^{-1} x = A$ হলে $\tan A$ এর মান কত?

সমাধানঃ $\cos^{-1} x = A \quad \therefore \cos A = x$

$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{\sin^2 A}}{\cos A} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ (Ans)

৫. $\sin(\cos^{-1} x)$ এর মান কত?

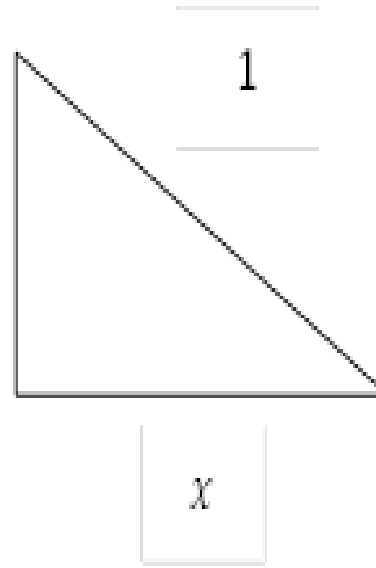
সমাধানঃ

$$\sin(\cos^{-1} x)$$

$$= \sin(\sin^{-1} \sqrt{1-x^2})$$

$$= \sqrt{1-x^2} \quad (\text{Ans})$$

$$\sqrt{1-x^2}$$



৬. $2\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$ কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

$$\text{সমাধানঃ } 2\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \quad (\text{Ans})$$

৭. $2\tan^{-1} \sqrt{3}$ কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

$$\text{সমাধানঃ } 2\tan^{-1} \sqrt{3} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2 \times 180^\circ}{3} = 120^\circ$$

(Ans)

৮. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

সমাধানঃ

$$\begin{aligned} & \tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right) \\ &= \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (Ans)} \end{aligned}$$

৯. $2 \sin^{-1}\left(\cos\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত রেডিয়ান ?

$$\begin{aligned} \text{সমাধানঃ } & 2 \sin^{-1}\left(\cos\cos^{-1}\frac{1}{2}\right) = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ (Ans)} \end{aligned}$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১. প্রমাণ কর যে, $4(\cot^{-1} 3 + \operatorname{cosec}^{-1} \sqrt{5}) = \pi$

বামপক্ষঃ

$$\cot^{-1} 3 + \operatorname{cosec}^{-1} \sqrt{5}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$$

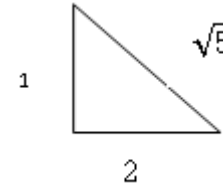
$$= \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} \quad (\text{প্রমানিত})$$

$$\text{অতিভুজ}^2 = \text{ভূমি}^2 + \text{লম্ব}^2$$

$$\text{বা, } (\sqrt{5})^2 = \text{ভূমি}^2 + (1)^2$$

$$\text{বা, } \text{ভূমি}^2 = 5 - 1 = 4$$

$$\therefore \text{ভূমি} = 2$$



$$\operatorname{cosec}^{-1} \sqrt{5} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

২.প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1} \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} \frac{\sqrt{13}}{2}$

অথবা, $\tan^{-1} \frac{2}{3} + \sec^{-1} \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\pi}{2}$

সমাধানঃ

বামপক্ষঃ $\tan^{-1} \frac{2}{3} + \sec^{-1} \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$= \tan^{-1} \frac{2}{3} + \tan^{-1} \frac{3}{2}$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{13}{6}}{1-1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{13}{0} \right)$$

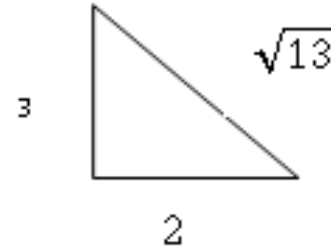
$$= \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2} \quad (\text{প্রমানিত})$$

অতিভুজ² = ভূমি² + লম্ব²

বা, $(\sqrt{13})^2 = (2)^2 + \text{লম্ব}^2$

বা, $\text{লম্ব}^2 = 13 - 4 = 9$

∴ $\text{লম্ব} = 3$



$$\sec^{-1} \frac{\sqrt{13}}{2} = \tan^{-1} \frac{3}{2}$$

৩.প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x}$

সমাধানঃ বামপক্ষঃ $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \times 2 \tan^{-1} \sqrt{x}$

$$= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left\{ \frac{1-(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2} \right\} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x} \text{ (প্রমানিত)}$$

৪.প্রমাণ কর যে, $\tan(2\tan^{-1} x) = 2\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} x^3)$

সমাধানঃ বামপক্ষঃ $\tan(2\tan^{-1} x) = \tan\left(\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2x}{1-x^2}$

ডানপক্ষঃ $2\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} x^3) = 2\tan\left(\tan^{-1} \frac{x+x^3}{1-x.x^3}\right)$

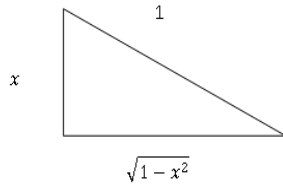
$$= 2 \left\{ \frac{x(1+x^2)}{(1-x^4)} \right\} = 2 \left\{ \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} \right\} = 2 \left\{ \frac{x}{(1-x^2)} \right\} = \frac{2x}{1-x^2}$$

=বামপক্ষ (প্রমানিত)

৫.প্রমাণ কর যে, $\text{costan}^{-1} \cot \sin^{-1} x = x$

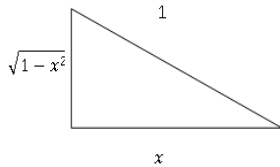
সমাধানঃ

বামপক্ষঃ $\text{costan}^{-1} \cot \sin^{-1} x$



$$= \text{costan}^{-1} \cot \cot^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$

$$= \text{costan}^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

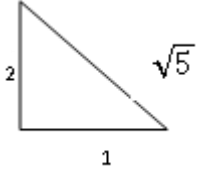


$$= \text{coscos}^{-1} x = x \quad (\text{প্রমানিত})$$

৬. প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \tan^{-1} 2$

সমাধানঃ

বামপক্ষঃ $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$



$$= \tan^{-1} 2 - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

$$= \tan^{-1} 2 - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1} \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \tan^{-1} 2 - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} \right)$$

$$= \tan^{-1} 2 - \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{5}$$

$$= \tan^{-1} 2 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

৭. যদি $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xy + yz + zx = 1$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$

$$\text{বা, } \tan^{-1} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \tan \frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \infty$$

$$\text{বা, } \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \frac{1}{0}$$

$$\text{বা, } 1 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore xy + yz + zx = 1 \text{ (প্রমানিত)}$$