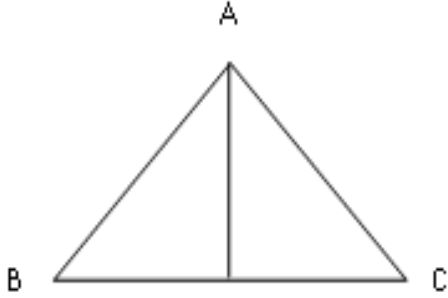


## অনুশীলনী-৫

### ত্রিভুজের ধর্ম (Properties of a Triangle)

#### প্রয়োজনীয় সূত্রাবলিঃ



$\Delta ABC$  এর ক্ষেত্রে  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  যথাক্রমে ত্রিভুজের বাহু

এবং  $\angle ABC = \angle B$ ,  $\angle BAC = \angle A$ ,  $\angle ACB = \angle C$  যথাক্রমে ত্রিভুজের কোণ  
(বাহুর বিপরীতে বাহুর কোণ থাকে)

$$১. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$২. \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$৩. \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$৪. \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$৫. a = b \cos C + c \cos B$$

$$৬. b = c \cos A + a \cos C$$

$$৭. c = a \cos B + b \cos A$$

$$৮. \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$৯. \tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

$$১০. \tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

$$১১. \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$১২. \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$১৩. \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$১৪. \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$১৫. \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$১৬. \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

## অতিসংক্ষিপ্তঃ

১. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে **a = 3, b = 7, c = 5** হলে **cosB** এবং **B** এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(5)^2 + (3)^2 - (7)^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-15}{30} = \frac{-1}{2}$  (Ans)

বা,  $\cos B = \cos 120^\circ \therefore B = 120^\circ$  (Ans)

২. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে **a = 21, b = 9, c = 15** হলে **cosA** এবং **A** এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(9)^2 + (15)^2 - (21)^2}{2 \cdot 9 \cdot 15} = \frac{-135}{270} = \frac{-1}{2}$  (Ans)

বা,  $\cos A = \cos 120^\circ \therefore A = 120^\circ$  (Ans)

৩. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে **a = 4, b = 5, c = 2** হলে **cosB** এবং **B** এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(2)^2 + (4)^2 - (5)^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{-5}{16}$

বা,  $\cos B = \frac{-5}{16} \therefore B = \cos^{-1} \left( \frac{-5}{16} \right) = 108.21^\circ$  (Ans)

৪. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে  $a = 2, b = 6, c = 8$  হলে  $\cos A$  এবং  $A$  এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(6)^2+(8)^2-(2)^2}{2.6.8} = \frac{96}{96} = 1$  (Ans)

বা,  $\cos A = \cos 0^\circ \therefore A = 0^\circ$  (Ans)

৫. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে  $a, b, c$  এবং কোনগুলো  $A, B, C$  হলে  $a, b, c$  এর সূত্রটি লিখ।

সমাধানঃ  $a = b \cos C + c \cos B$

$b = c \cos A + a \cos C$

$c = a \cos B + b \cos A$  (Ans)

৬. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে  $a, b, c$  এবং  $s$  অর্ধ-পরিসীমা হলে  $\cos \frac{A}{2}, \cos \frac{B}{2}, \cos \frac{C}{2}$  এর সূত্রটি লিখ।

সমাধানঃ  $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}, \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$  (Ans)

৭. **ABC** ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে  $a, b, c$  এবং কোনগুলো  $A, B, C$  হলে  $\tan \frac{A-B}{2}, \tan \frac{B-C}{2}, \tan \frac{C-A}{2}$  এর সূত্রটি লিখ।

সমাধানঃ  $\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}, \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}, \tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$  (Ans)

সংক্ষিপ্ত :

$$১. \text{যে-কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রমান করঃ } \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$\text{প্রমানঃ যেকোন ত্রিভুজে আমরা জানি, } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{বা, } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$\text{বা, } \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$$

$$\text{বা, } \frac{b-c}{b+c} = \frac{2 \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\text{বা, } \frac{b-c}{b+c} = \cot\left(\frac{B+C}{2}\right) \tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\text{বা, } \frac{b-c}{b+c} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\therefore \left[ \begin{array}{l} A + B + C = \pi \\ \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{বা, } \frac{b-c}{b+c} = \tan \frac{A}{2} \tan \left( \frac{B-C}{2} \right)$$

$$\text{বা, } \tan \left( \frac{B-C}{2} \right) = \frac{b-c}{b+c} \cdot \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}$$

$$\therefore \tan \left( \frac{B-C}{2} \right) = \frac{b-c}{b+c} \cdot \cot \frac{A}{2}$$

$$\text{২. যে-কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রমাণ করঃ } \tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

$$\text{প্রমাণঃ যে কোন ত্রিভুজে আমরা জানি, } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\text{বা, } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\text{বা, } \frac{c-a}{c+a} = \frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A}$$

$$\text{বা, } \frac{c-a}{c+a} = \frac{2 \cos \left( \frac{A+C}{2} \right) \sin \left( \frac{C-A}{2} \right)}{2 \sin \left( \frac{A+C}{2} \right) \cos \left( \frac{C-A}{2} \right)}$$

$$\text{বা, } \frac{c-a}{c+a} = \cot \left( \frac{A+C}{2} \right) \tan \left( \frac{C-A}{2} \right)$$

$$\text{বা, } \frac{c-a}{c+a} = \cot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) \tan \left( \frac{C-A}{2} \right)$$

$$\therefore \left[ \begin{array}{l} A + B + C = \pi \\ \frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \end{array} \right]$$

$$\text{বা, } \frac{c-a}{c+a} = \tan \frac{B}{2} \tan \left( \frac{C-A}{2} \right)$$

$$\text{বা, } \tan \left( \frac{C-A}{2} \right) = \frac{c-a}{c+a} \cdot \frac{1}{\tan \frac{B}{2}}$$

$$\therefore \tan \left( \frac{C-A}{2} \right) = \frac{c-a}{c+a} \cdot \cot \frac{B}{2}$$

৩.  $\triangle ABC$  ত্রিভুজে  $a = 2, b = \sqrt{6}, \angle B = 60^\circ$  হলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

বা,  $b \sin A = a \sin B$

বা,  $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{2 \times \sin 60^\circ}{\sqrt{6}}$   
 $= \frac{2}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা,  $\sin A = \sin 45^\circ$

$\therefore A = 45^\circ$

আবার যেহেতু,  $A + B + C = 180^\circ$

বা,  $C = 180^\circ - (A + B)$   
 $= 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

আবার, আমরা জানি,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

বা,  $c \sin A = a \sin C$

বা,  $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}$

$= \frac{2 \times \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2} \times \left( \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right)$

$\therefore \left[ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right]$   
 $= \sqrt{3} + 1$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধানঃ  $A = 45^\circ, C = 75^\circ, c = \sqrt{3} + 1$

8. ABC ত্রিভুজে  $b = \sqrt{3}$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 120^\circ$  হলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{বা, } C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

$$\text{আমরা জানি, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\text{বা, } a \sin B = b \sin A$$

$$\text{বা, } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{3} \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধানঃ } C = 30^\circ, a = 1, c = 1$$

আবার,

$$\text{আমরা জানি, } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\text{বা, } c \sin A = a \sin C$$

$$\text{বা, } c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{1 \times \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1$$

$$\therefore c = 1$$



৫.  $\triangle ABC$  ত্রিভুজে  $a = \sqrt{3}$ ,  $c = 1$ ,  $\angle A = 30^\circ$  হলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

বা,  $a \sin C = c \sin A$

$$\text{বা, } \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{1 \times \sin 30^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sin C = \sin 16.7^\circ$$

$$\therefore C = 16.7^\circ$$

আমরা জানি,  $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{বা, } B = 180^\circ - (A + C)$$

$$= 180^\circ - (16.7^\circ + 30^\circ) = 133.3^\circ$$

আমরা জানি,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\text{বা, } b \sin A = a \sin B$$

$$\text{বা, } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{3} \times \sin 133.3^\circ}{\sin 30^\circ} = 2.52$$

$$\therefore b = 2.52$$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধানঃ  $C = 16.7^\circ$ ,  $B = 133.3^\circ$ ,  $b = 2.52$

৬.  $\triangle ABC$  ত্রিভুজে  $a = 3\sqrt{3}$ ,  $b = 3$ ,  $\angle B = 30^\circ$  হলে ত্রিভুজটি সমাধান কর।

সমাধানঃ আমরা জানি,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\text{বা, } b \sin A = a \sin B$$

$$\text{বা, } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3\sqrt{3} \times \sin 30^\circ}{3}$$

$$\text{বা, } \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin A = \sin 60^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ$$

আমরা জানি,  $A + B + C = 180^\circ$

$$\text{বা, } C = 180^\circ - (A + B)$$

$$= 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

আমরা জানি,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{বা, } c \sin A = a \sin C$$

$$\text{বা, } c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{3\sqrt{3} \times \sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3} \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধানঃ  $A = 60^\circ$ ,  $C = 90^\circ$ ,  $c = 6$

৭.  $ABC$  ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে  $3, 5, 7$  হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটি স্থলোকোণী এবং স্থলো কোনটি নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি,  $ABC$  ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে  $a = 3, b = 5, c = 7$

$$\text{আমরা জানি, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3)^2 + (5)^2 - (7)^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos C = \cos 120^\circ \quad \therefore C = 120^\circ$$