

অনুশীলনী-৬

ফাংশন (Function)

অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন :

১. ফাংশন বা অপেক্ষক কাকে বলে ?

উত্তরঃ যদি দুটি চলক x ও y এমনভাবে সম্পর্ক যুক্ত হয় যে, x এর যে কোন মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট একটি অনন্য মান পাওয়া যায়, তাহলে y কে x এর ফাংশন বলে। ইহাকে $y = f(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

২. $f(x) = \cos x$ হয়, তবে $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \cos x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Ans)

৩. $f(\theta) = \cos \theta$ হয়, তবে $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(\theta) = \cos \theta \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (Ans)

৪. $f(x) = \sin x$ হয়, তবে $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Ans)

৬. $\varphi(x) = \frac{3x+4}{x-5}$ হয়, তবে $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \frac{3x+4}{x-5} \quad \therefore \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + 4}{\frac{1}{3} - 5} = \frac{5}{\frac{-14}{3}} = \frac{-15}{14}$ (Ans)

৭. $\varphi(x) = \frac{3x+4}{x-5}$ হয়, তবে $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \frac{3x+4}{x-5} \quad \therefore \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3 \cdot \frac{1}{x} + 4}{\frac{1}{x} - 5} = \frac{\frac{3+4x}{x}}{\frac{1-5x}{x}} = \frac{3+4x}{1-5x}$ (Ans)

৮. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 15$ হয়, তবে $f(-1)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 15$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4(-1) + 15 = -1 - 3 - 4 + 15 = 7$ (Ans)

৯. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(\tan\theta) = \sin 2\theta$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \therefore f(\tan\theta) = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \sin 2\theta$ (Ans)

১০. $f(x) = 5^x + 5^{-x}$ হয়, তবে $f(0)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 5^x + 5^{-x} \quad \therefore f(0) = 5^0 + 5^{-0} = 1 + 1$ (Ans)

১১. $f(x) = a^{-x}$ হয়, তবে $f(0)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = a^{-x} \therefore f(0) = a^{-0} = 1$ (Ans)

১২. $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ হয়, তবে $f(\infty)$ এর মান কত ?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 5^x + 5^{-x} \therefore f(\infty) = 3^\infty + 3^{-\infty} = \infty + 0 = \infty$ (Ans)

১৩. $y = f(x) = \sin x$ হয়, তবে $f(2x)$ এর মান y এর সাহায্যে \therefore প্রকাশ কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \sin x \therefore f(x) = \sin x$ এবং $y = \sin x$

এখন, $f(2x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \sin x \sqrt{\cos^2 x} = 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$
 $= 2y \sqrt{1 - y^2}$ (Ans)

১৪. $y = f(x) = \tan x$ হয়, তবে $f(2x)$ এর মান y এর সাহায্যে \therefore প্রকাশ কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \tan x \therefore f(x) = \tan x$ এবং $y = \tan x$

এখন, $f(2x) = \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2y}{1 - y^2}$ (Ans)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন :

১. যদি $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(y) = x$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4} \quad \therefore y = \frac{4x-7}{2x-4}$ এবং $f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

$$\text{L.H.S} = f(y) = \frac{4y-7}{2y-4} = \frac{4 \cdot \frac{4x-7}{2x-4} - 7}{2 \cdot \frac{4x-7}{2x-4} - 4} = \frac{\frac{16x-28-14x+28}{2x-4}}{\frac{8x-14-8x+16}{2x-4}} = \frac{2x}{2} = x \text{ (R.H.S)}$$

২. যদি $y = f(x) = \frac{lx+m}{nx-l}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(y) = x$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \frac{lx+m}{nx-l}$

$$\therefore f(y) = \frac{ly+m}{ny-l} = \frac{l \cdot \frac{lx+m}{nx-l} + m}{n \cdot \frac{lx+m}{nx-l} - l} = \frac{\frac{l^2x+ml+mnx-ml}{nx-l}}{\frac{nlx+mn-lnx+l^2}{nx-l}} = \frac{x(l^2+mn)}{l^2+mn} = x \text{ (Proved)}$$

৩. যদি $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হয়, তবে, দেখাও যে, $f(\cos\theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2}$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$\therefore f(\cos\theta) = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan^2 \frac{\theta}{2} \text{ (Proved)}$$

৪.যদি $f(y) = \frac{1+y^2+y^4}{y^2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(y) = \frac{1+y^2+y^4}{y^2} \quad \therefore f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$\text{L.H.S} = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1+x^2+x^4}{x^2} = f(x) = (\text{R.H.S})$$

৫.যদি $f(x) = e^x + e^{-x}$ হয়, তবে, দেখাও যে, $f(x+y) \cdot f(x-y) = f(2x) + f(2y)$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = e^x + e^{-x}$

$$\therefore f(2x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$\therefore f(2y) = e^{2y} + e^{-2y}$$

$$\text{আবার, } f(x+y) = e^{x+y} + e^{-(x+y)} = e^x \cdot e^y + e^{-x} \cdot e^{-y}$$

$$\therefore f(x-y) = e^{x-y} + e^{-(x-y)} = e^x \cdot e^{-y} + e^{-x} \cdot e^y$$

$$\text{L.H.S} = f(x+y) \cdot f(x-y)$$

$$= (e^x \cdot e^y + e^{-x} \cdot e^{-y})(e^x \cdot e^{-y} + e^{-x} \cdot e^y)$$

$$= e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$$

$$= (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y}) = f(2x) + f(2y) (\text{R.H.S})$$

৬. যদি $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ এবং $g(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$ হয়, তবে দেখাও যে,
 $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$

সমাধানঃ

$$\begin{array}{l|l} \text{দেওয়া আছে, } f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x}) & \text{আবার, } g(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x}) \\ \therefore f(y) = \frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}) & \therefore g(y) = \frac{1}{2}(3^y - 3^{-y}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= f(x+y) \\ &= \frac{1}{2}\{3^{x+y} + 3^{-(x+y)}\} \\ &= \frac{1}{2}(3^x \cdot 3^y + 3^{-x} \cdot 3^{-y}) \end{aligned}$$

$$\text{R.H.S} = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

$$= \left\{\frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})\right\} \cdot \left\{\frac{1}{2}(3^y + 3^{-y})\right\} + \left\{\frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})\right\} \cdot \left\{\frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\{(3^x \cdot 3^y + 3^x \cdot 3^{-y} + 3^{-x} \cdot 3^y + 3^{-x} \cdot 3^{-y} + 3^x \cdot 3^y - 3^x \cdot 3^{-y} - 3^{-x} \cdot 3^y + 3^{-x} \cdot 3^{-y})\}$$

$$= \frac{1}{4}\{2(3^x \cdot 3^y + 3^{-x} \cdot 3^{-y})\} = \frac{1}{2}(3^x \cdot 3^y + 3^{-x} \cdot 3^{-y})$$

L.H.S = R.H.S (Proved)