অনুশীলনী-৮

মূল নিয়মে অন্তরক সহগ (Differential Co-efficient from first Principle)

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

১. মূল নিয়মে অন্তরক সহগের সূত্রটি লিখ।

উত্তরঃ মূল নিয়মে অন্তরক সহগের সূত্রটি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **(Ans)**

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নঃ

সূত্রাবলীঃ

আমরা জানি, $\mathbf{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\ldots\infty}$

আবার, $\mathbf{\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots\ldots\infty}$

১.মূল নিয়মে e^x এর অন্তরক সহগ / $\frac{dy}{dx}$ নির্নয় কর।

সমাধানঃ ধরি,$y = f(x) = e^x \quad \therefore f(x+h) = e^{x+h}$

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

বা,$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x.e^h-e^x}{h}$

বা,$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \lim_{h \to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x. \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(e^h-1)$

বা,$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\ldots\infty\right)-1\right\}$

বা,$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\ldots\infty\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x. \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{1!}+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots\ldots\infty\right) = e^x(0+0+0) = e^x$ **(Ans)**

২.মূল নিয়মে $\log_a x$ এর অন্তরক সহগ / $\frac{dy}{dx}$ নির্নয় কর।

সমাধানঃ ধরি, $y = f(x) = \log_a x = \log_a e . \log_e x \quad \therefore \ f(x+h) = \log_a e . \log_e (x+h)$

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a e.\log_e(x+h)-\log_a e.\log_e x}{h} = \log_a e. \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \log_a e. \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}.\log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log_a e. \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}.\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \log_a e. \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} + \ldots\ldots\ldots\infty\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \log_a e. \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} + \cdots\ldots\ldots\ \infty\right) = \frac{1}{x}.\log_a e$ **(Ans)**

৩.মূল নিয়মে a^x এর অন্তরক সহগ / $\frac{dy}{dx}$ নির্নয় কর।

সমাধানঃ ধরি, $y = f(x) = a^x \ \therefore \ f(x+h) = a^{x+h} = a^x . a^h$

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^x . a^h - a^x}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x . \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(a^h - 1) = a^x . \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{\log a^h} - 1\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{h\log a} - 1\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\left(1 + \frac{h\log a}{1!} + \frac{(h\log a)^2}{2!} + \frac{(h\log a)^3}{3!} + \cdots\ldots\infty\right) - 1\right\}$

বা, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \lim_{h \to 0} \left(\frac{\log a}{1!} + \frac{h(\log a)^2}{2!} + \frac{h^2(\log a)^3}{3!} + \cdots\ldots\infty\right) = a^x . \log a$ **(Ans)**

৪.মূল নিয়মে $\sqrt{x}$ এর অন্তরক সহগ / $\frac{dy}{dx}$ নির্নয় কর।

সমাধানঃ ধরি, $y = f(x) = \sqrt{x} \quad \therefore \; f(x+h) = \sqrt{x+h}$

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

বা, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

বা, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{(\sqrt{x+0}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(Ans)**

৫.মূল নিয়মে Sinx এর অন্তরক সহগ / $\frac{dy}{dx}$ নির্নয় কর।

সমাধানঃ ধরি, $y = f(x) = Sinx \quad \therefore \ f(x+h) = Sin(x+h)$

আমরা জানি, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(Sinx) = \lim_{h \to 0} \frac{Sin(x+h)-Sinx}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(Sinx) = \lim_{h \to 0} \frac{2Cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)Sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} 2Cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\frac{Sin\frac{h}{2}}{h}$

বা, $\frac{d}{dx}(Sinx) = \lim_{h \to 0} Cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \lim_{h \to 0} \frac{Sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

বা, $\frac{d}{dx}(Sinx) = Cos\left(x+\frac{0}{2}\right).1 = Cosx$ (**Ans)**