

# অনুশীলনী-০৯

## প্রয়োজনীয় সূত্রাবলীঃ

১.  $\frac{d}{dx}(a^x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$  (Ans)

২.  $\frac{d}{dx}(2^x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \log_e 2$  (Ans)

৩.  $\frac{d}{dx}(10^x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \log_e 10$  (Ans)

৪.  $\frac{d}{dx}(\log_a x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$  (Ans)

৫.  $\frac{d}{dx}(\log_b x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x} \cdot \log_b e$  (Ans)

৬.  $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(\log_{10} x) = \frac{1}{x} \log_{10} e$  (Ans)

৭.  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  (Ans)

৮.  $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$  (Ans)

৯.  $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) =$  কত ?

সমাধানঃ  $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (Ans)

১০.  $\frac{d}{dx} (\text{Cos}^{-1}x) =$  কত ? সমাধানঃ  $\frac{d}{dx} (\text{Cos}^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  (Ans)

১১.  $\frac{d}{dx} (\text{tan}^{-1}x) =$  কত ? সমাধানঃ  $\frac{d}{dx} (\text{tan}^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$  (Ans)

১২.  $\frac{d}{dx} (\text{Cot}^{-1}x) =$  কত ? সমাধানঃ  $\frac{d}{dx} (\text{Cot}^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$  (Ans)

১৩.  $\frac{d}{dx} (\text{Sec}^{-1}x) =$  কত ? সমাধানঃ  $\frac{d}{dx} (\text{Sec}^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$  (Ans)

১৪.  $\frac{d}{dx} (\text{Cosec}^{-1}x) =$  কত ? সমাধানঃ  $\frac{d}{dx} (\text{Cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$  (Ans)

## সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন :

১.  $\frac{\text{Sin}x+\text{Cos}x}{\sqrt{1+\text{Sin}2x}}$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি  $y = \frac{\text{Sin}x+\text{Cos}x}{\sqrt{1+\text{Sin}2x}}$

$$\text{বা, } y = \frac{\text{Sin}x+\text{Cos}x}{\sqrt{1+\text{Sin}2x}} = \frac{\text{Sin}x+\text{Cos}x}{\sqrt{\text{Sin}^2x+\text{Cos}^2x+2\text{Sin}x\text{Cos}x}} = \frac{\text{Sin}x+\text{Cos}x}{\sqrt{(\text{Sin}x+\text{Cos}x)^2}} = \frac{\text{Sin}x+\text{Cos}x}{\text{Sin}x+\text{Cos}x} = 1$$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(1) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{Ans})$$

২.  $\tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2}$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি,  $y = \tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2} = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2x}{1-(2x)^2} = 2 \tan^{-1} 2x$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{ 2 \tan^{-1} 2x \}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot \frac{d}{dx} 2x$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+4x^2} \cdot 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4}{1+4x^2} \quad (\text{Ans})$$

৩.  $\log \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধানঃ ধরি } y = \log \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \log \sqrt{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \log \sqrt{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \log\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ \log\left(\tan \frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{d}{dx} \left( \tan \frac{x}{2} \right) = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{Cosec} x \quad (\text{Ans})$$

৪.  $\log \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধানঃ ধরি, } y = \log \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \log \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}} = \log \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} = \log \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \log \frac{1+\sin x}{\cos x} = \log \left( \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \log(\sec x + \tan x)$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{\log(\sec x + \tan x)\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \frac{d}{dx} (\sec x + \tan x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} (\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec x \quad (\text{Ans})$$

৫.  $\cot^{-1} \frac{1+x}{1-x}$  ফাংশনটির x এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধানঃ ধরি, } y = \cot^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{1+x^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2} \quad (\text{Ans})$$

৬.  $(x^2 + 1) \tan^{-1} x - x$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি,  $y = (x^2 + 1) \tan^{-1} x - x$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{(x^2 + 1) \tan^{-1} x\} - \frac{d}{dx} (x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \left\{ (x^2 + 1) \frac{d}{dx} \tan^{-1} x + \tan^{-1} x \frac{d}{dx} (x^2 + 1) \right\} - 1$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \left\{ (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1} x (2x + 0) \right\} - 1$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = 1 + 2x \tan^{-1} x - 1 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x \tan^{-1} x \quad (\text{Ans})$$

৭. যদি  $y = x(x^2 - 12)$  হয় তবে  $x$  এর কোন মানের জন্য  $\frac{dy}{dx} = 0$  হবে

সমাধানঃ  $y = x(x^2 - 12) = x^3 - 12x$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$$

যেহেতু  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\text{বা, } 3x^2 - 12 = 0$$

$$\text{বা, } 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{বা, } x^2 = 4 \quad \therefore x = \pm 2 \quad (\text{Ans})$$

৮.  $\tan(\sin^{-1} x)$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি  $y = \tan(\sin^{-1} x)$

$$= \tan \left\{ \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}(x) - x \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1-x^2})^2}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(1-x^2)}{1-x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (0-2x)}{1-x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = (1-x^2)^{-3/2} \quad (\text{Ans})$$

৯.  $\log(\sin 2x)$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি,  $y = \log(\sin 2x)$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{\log(\sin 2x)\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 2x} \frac{d}{dx} (\sin 2x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 2x} (2\cos 2x) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot 2x \quad (\text{Ans})$$

১০.  $\sin^2(\log \sec x)$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি  $y = \sin^2(\log \sec x) = \{\sin(\log \sec x)\}^2$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{\sin(\log \sec x)\}^2$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = 2\sin(\log \sec x) \frac{d}{dx} \{\sin(\log \sec x)\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = 2\sin(\log \sec x) \cos(\log \sec x) \frac{d}{dx} (\log \sec x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \sin(2\log \sec x) \cdot \frac{1}{\sec x} \frac{d}{dx} (\sec x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \sin(\log \sec^2 x) \cdot \frac{1}{\sec x} (\sec x \tan x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \sin(\log \sec^2 x) \cdot \tan x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \tan x \cdot \sin(\log \sec^2 x) \quad (\text{Ans})$$



১১.  $x^{\cos^{-1}x}$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি  $y = x^{\cos^{-1}x}$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1}x} \cdot \frac{d}{dx} (\cos^{-1}x \cdot \log x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1}x} \left\{ \cos^{-1}x \cdot \frac{d}{dx} (\log x) + \log x \cdot \frac{d}{dx} (\cos^{-1}x) \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1}x} \left\{ \cos^{-1}x \cdot \frac{1}{x} + \log x \left( \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cos^{-1}x} \left\{ \frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \quad (\text{Ans})$$

১২.  $\text{Sin}x^{\tan x}$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি  $y = \text{Sin}x^{\tan x}$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \text{Sin}x^{\tan x} \cdot \frac{d}{dx} (\tan x \cdot \log \text{Sin}x)$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \text{Sin}x^{\tan x} \left\{ \tan x \cdot \frac{d}{dx} (\log \text{Sin}x) + \log \text{Sin}x \cdot \frac{d}{dx} (\tan x) \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \text{Sin}x^{\tan x} \left\{ \tan x \cdot \frac{1}{\text{Sin}x} \cdot \frac{d}{dx} (\text{Sin}x) + \log \text{Sin}x \cdot \text{Sec}^2 x \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \text{Sin}x^{\tan x} \left\{ \tan x \cdot \frac{1}{\text{Sin}x} \cdot \text{Cos}x + \log \text{Sin}x \cdot \text{Sec}^2 x \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = \text{Sin}x^{\tan x} \left\{ \tan x \cdot \text{Cot}x + \log \text{Sin}x \cdot \text{Sec}^2 x \right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \text{Sin}x^{\tan x} \left\{ 1 + \text{Sec}^2 x \cdot \log \text{Sin}x \right\} \quad (\text{Ans})$$

২৪.  $(x^x)^x$  ফাংশনটির  $x$  এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি  $p = x^x$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই

$$\text{বা, } \frac{dp}{dx} = x^x \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot \log x)$$

$$\text{বা, } \frac{dp}{dx} = x^x \cdot \frac{d}{dx} (x \cdot \log x)$$

$$\text{বা, } \frac{dp}{dx} = x^x \cdot \left\{ x \cdot \frac{d}{dx} (\log x) + \log x \frac{d}{dx} (x) \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{dp}{dx} = x^x \cdot \left\{ x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1 \right\}$$

$$\text{বা, } \frac{d}{dx} (x^x) = x^x \cdot \{1 + \log x\} \dots \dots \dots (i)$$

এখন ধরি,  $y = (x^x)^x$

$x$  এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = (x^x)^x \cdot \frac{d}{dx} \{x \cdot \log(x^x)\}$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = (x^x)^x \cdot \left[ x \frac{d}{dx} \{\log(x^x)\} + \log(x^x) \frac{d}{dx} (x) \right]$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = (x^x)^x \cdot \left[ x \cdot \frac{1}{x^x} \cdot \frac{d}{dx} (x^x) + \log(x^x) \cdot 1 \right]$$

$$\text{বা, } \frac{dy}{dx} = (x^x)^x \cdot \left[ x \cdot \frac{1}{x^x} \cdot x^x \cdot (1 + \log x) + x \log x \right]$$

[(i)নং দ্বারা]

$$\text{বা, } \frac{d}{dx} \{(x^x)^x\} = (x^x)^x \cdot [x + x \log x + x \log x]$$

$$\text{বা, } \frac{d}{dx} \{(x^x)^x\} = (x^x)^x \cdot [x + 2x \log x]$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \{(x^x)^x\} = (x^x)^x \cdot x [1 + \log x^2] \quad (\text{Ans})$$